Markov Ketten

Wiederkehrzeiten, Erneuerungssatz und Rückkehr zum Startpunkt

Michael Gerhäuser

7. Mai 2007

Satz (Wiederkehrsatz von Mark Kac)

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Zufallsgrößen. (X_n) stationär bezüglich P^α, α eine stationäre Verteilung. Dann gilt:

$$\alpha(x)\,\mathbb{E}^x(\tau_x) = P^\alpha(\tau_x < \infty)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\alpha(x)\,\mathbb{E}^x(\tau_x) &= P^\alpha(X_0 = x)\,\mathbb{E}^x(\tau_x) = P^\alpha(X_0 = x)\,\mathbb{E}^x\left(\sum_{k\geq 0} 1_{\{\tau_x > k\}}\right) = \\
&= P^\alpha(X_0 = x)\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}^x\left(1_{\{\tau_x > k\}}\right) = \sum_{k\geq 0} P^\alpha(X_0 = x)\,P^x(\tau_x > k) = \\
&\overset{\text{Markov}}{=} \sum_{k\geq 0} P^\alpha(X_0 = x, \tau_x > k) = \sum_{k\geq 0} P^\alpha(X_0 = x, X_i \neq x \quad \text{für } 1 \leq i \leq k) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} P^\alpha(X_0 = x, X_i \neq x \quad \text{für } 1 \leq i \leq k) = \dots
\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

$$\begin{aligned}
\alpha(x)\,\mathbb{E}^x(\tau_x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} P^\alpha\left(X_0 = x, X_i \neq x \quad \text{für } 1 \leq i \leq k\right) = \\
&\overset{\text{Markov}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} P^\alpha\left(X_{n-k} = x, X_i \neq x \quad \text{für } n-k+1 \leq i \leq n\right) = \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} P^\alpha\left(\tau_x \leq n\right) = P^\alpha\left(\tau_x < \infty\right)
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: Die Ereignisse auf der linken Seite besagen "$n-k$ ist der letzte Zeitpunkt vor dem Zeitpunkt n, zu dem die Markov-Kette den Zustand x annimmt". Für $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ sind diese Ereignisse also disjunkt und ihre Vereinigung ist gerade das Ereignis $\{\tau_x \leq n\}$, zu finden auf der rechten Seite.

□

Dieser Satz liefert uns die erste Beziehung zwischen der stationären Verteilung α und der mittleren Rückkehrzeit $\mathbb{E}^x(\tau_x)$. Wir werden gleich sehen, dass unter bestimmten Voraussetzungen $P^\alpha(\tau_x < \infty) = 1$ gilt und damit auch

$$\alpha(x) = \frac{1}{\mathbb{E}^x(\tau_x)}$$

Korollar

Sei E eine Zustandsmenge, $|E| < \infty$ und es gebe ein $k \geq 1$ mit

$$\Pi^k(x, y) > 0 \qquad \forall x, y \in E$$

Sei wie im Ergodensatz

$$\alpha(y) = \lim_{n \to \infty} \Pi^n(x, y) > 0$$

Dann gilt:

$$\alpha(x) = \frac{1}{\mathbb{E}^x(\tau_x)}$$

Beweis.

Nach dem letzten Satz bleibt zu zeigen: $P^\alpha(\tau_x < \infty) = 1$. Nun gilt aber:

$$\mathbb{E}^x(\tau_x) \leq \frac{1}{\alpha(x)} < \infty$$

also insbesondere $P^x(\tau_x < \infty) = 1$. Aufgrund des folgenden Satzes gilt dann sogar:

$$P^x(X_n = x \text{ für unendlich viele } n) = 1$$

Fortsetzung des Beweises.

Nach dem Korollar über die Asymptotische Stationarität gilt nun:

$$\begin{aligned} P^{\alpha}(\tau_x < \infty) &= P^{\alpha}(X_k = x \text{ für ein } k \geq 1) = \\ &= \lim_{n \to \infty} P^{x}(X_k = x \text{ für ein } k \geq n) \geq \\ &\geq P^{x}(X_k = x \text{ für unendlich viele } k) = 1 \end{aligned}$$

□

Beispiel

Wir kennen bereits die folgende stochastische Matrix Π und wissen ebenfalls schon, dass sie konvergiert und wogegen:

$$\Pi^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Dies führt uns - aufgrund der Aussage des letzten Satzes - zu folgenden mittleren Rückkehrzeiten:

$$\mathbb{E}^1(\tau_1) = 2, \quad \mathbb{E}^2(\tau_2) = \frac{8}{3}, \quad \mathbb{E}^3(\tau_3) = 8$$

Simulation dieses Sachverhalts in R

Listing 1: Erzeugen einer Markov-Kette mittels zugehöriger stochastischer Matrix P

```
markov <- function(P, len=1000, start=1) {
  n <- NROW(P)
  y = numeric(100)
  y[1] = start;
  for(i in 2:len) {
    y[i] = which(rmultinom(1, size = 1, prob = P[y[i-1], ])==1)
  }
  y
}
```

Listing 2: Erzeugen der Kette

```
P <- matrix(c(0.5, 1.0/3.0, 1.0, 0.5, 1.0/3.0,
              0.0, 0.0, 1.0/3.0, 0.0), 3, 3, byrow=FALSE)
m <- markov(P, len=10000, start=1)
m
```

Listing 3: Berechnen der mittleren Rückkehrzeit

```
return_times <- function(m, start=1) {
  y <- 0
  cc <- 0
  for(i in 1:length(m)) {
    if(m[i] == start) {
      cc <- cc+1
      y <- c(y, cc)
      cc <- 0
    }
    else {
      cc <- cc+1
    }
  }
  y
}
rt1 <- return_times(m, 1)
rt2 <- return_times(m, 2)
rt3 <- return_times(m, 3)
sum(rt1) / length(rt1)
sum(rt2) / length(rt2)
sum(rt3) / length(rt3)
```

Definition

Für gegebenes $x \in E$ sei

$$F_1(x,x) := P^x(\tau_x < \infty)$$

die Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr nach x zu irgendeiner endlichen Zeit.

$$F_\infty(x,x) := P^x(X_n = x \text{ für unendlich viele } n)$$

die Wahrscheinlichkeit unendlich oft zurückzukehren.

$$G(x,x) := \sum_{n\geq 0} \Pi^n(x,x) = \sum_{n\geq 0} P^x(X_n = x) = \mathbb{E}^x\left(\sum_{n\geq 0} 1_{\{X_n = x\}}\right)$$

die erwartete Anzahl der Rückkehrzeiten nach x.

Im nächsten Satz werden wir diese drei eben definierten Größen genauer betrachten und uns die Zusammenhänge zwischen ihnen klar machen.

Satz

Für jedes $x \in E$ gibt es die folgenden zwei Alternativen:

1. $F_1(x,x) = 1$. *Dann gilt:*
$$F_\infty(x,x) = 1$$
und
$$G(x,x) = \infty$$
2. $F_1(x,x) < 1$. *Dann ist*
$$F_\infty(x,x) = 0$$
und
$$G(x,x) = (1 - F_1(x,x))^{-1} < \infty$$

Definition

Im Fall $F_1(x,x) = 1$ heißt x *rekurrent* bezüglich Π, ist $F_1(x,x) < 1$ heißt x *transient* bezüglich Π.

Beweis.

Sei $\sigma := \sup\{n \geq 0 : X_n = x\}$ der Zeitpunkt des letzten Aufenthalts in x. Wegen $X_0 = x$ ist σ wohldefiniert, jedoch gegebenenfalls $\sigma = \infty$. Dann gilt:

$$P^x(\sigma < \infty) = 1 - P^x(X_n = x \text{ für unendlich viele } n) = 1 - F_\infty(x,x)$$

Ebenso gilt:

$$\begin{aligned} P^x(\sigma = n) &= P^x(X_n = x, \quad X_{n+i} \neq x \quad \forall i \geq 1) = \\ &= P^x(X_n = x)\, P^x(X_{n+i} \neq x \quad \forall i \geq 1) = \\ &\overset{Markov}{=} P^x(X_n = x)\, P^x(X_i \neq x \quad \forall i \geq 1) = \Pi^n(x,x)\,(1 - P^x(\tau_x < \infty)) = \\ &= \Pi^n(x,x)\,(1 - F_1(x,x)) \end{aligned}$$

Durch Summation über n ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P^x(\sigma = n) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} P^x(\sigma = n) = \lim_{N\to\infty} P^x(\sigma \leq N) = \\ &= P^x(\sigma < \infty) = 1 - F_\infty(x,x) \end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung).

Ebenso erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} P^x(\sigma = n) &= \sum_{n\geq 0}\left[\Pi^n(x,x)(1-F_1(x,x))\right] = (1-F_1(x,x))\sum_{n\geq 0}\Pi^n(x,x) = \\ &= (1-F_1(x,x))\, G(x,x)\end{aligned}$$

Die bisherigen Ergebnisse zusammengefasst:

$$\begin{aligned}P^x(\sigma < \infty) &= 1 - F_\infty(x,x) && (1)\\ P^x(\sigma = n) &= \Pi^n(x,x)(1-F_1(x,x)) && (2)\\ \sum_{n\geq 0} P^x(\sigma = n) &= 1 - F_\infty(x,x) && (3)\\ &= (1-F_1(x,x))\, G(x,x) && (4)\end{aligned}$$

1. $F_1(x,x) = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} P^x(\sigma = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   $\overset{(3)}{\Rightarrow} F_\infty(x,x) = 1 \overset{Borel-Cantelli}{\Rightarrow} G(x,x) = \infty$

Beweis (Fortsetzung).

2. $F_1(x,x) < 1 \overset{(4)}{\Rightarrow} G(x,x) < \infty$, da $\sum_{n \geq 0} P^x(\sigma = n) < \infty$

$\overset{Borel-Cantelli}{\Rightarrow} F_\infty(x,x) = 0$

$\overset{(3)+(4)}{\Rightarrow} (1 - F_\infty(x,x)) = (1 - F_1(x,x))\, G(x,x) \quad \Leftrightarrow \quad G(x,x) = (1 - F_1(x,x))^{-1}$

□

Beispiel (Erneuerung technischer Geräte / Erneuerungssatz in vereinfachter Form)

Wir betrachten technische Geräte, die zum Zeitpunkt ihres Defektes sofort durch ein neues Gerät ersetzt werden. Ihre Funktionsdauer sei gegeben durch unabhängig identisch verteilte Zufallsgrößen $(L_i)_{i\geq 1}$ mit Werten in $\{1, \ldots, N\}$, wobei N die maximale Funktionsdauer ist. Der Einfachheit halber sei $P(L_1 = l) > 0$ für alle $1 \leq l \leq N$, d.h. die Geräte können in jedem Alter defekt werden. Sei $T_k = \sum_{i=1}^{k} L_i$ der Zeitpunkt, zu dem das k-te Gerät ersetzt wird, $T_0 = 0$ und

$$X_n = n - max\left\{T_k : k \geq 1, T_k \leq n\right\}, \quad n \geq 0$$

das Alter des zur Zeit n benutzten Geräts. Dann ist $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette auf $E = \{0, \ldots, N-1\}$ mit Übergangsmatrix

$$\Pi(x, y) = \begin{cases} P(L_1 > y | L_1 > x) & \text{falls } y = x + 1 < N \\ P(L_1 = x + 1 | L_1 > x) & \text{falls } y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine solche Markov-Kette, die eine zufällige Zeit lang um 1 anwächst und dann wieder auf 0 zurückfällt, wird auch als *Kartenhausprozess* bezeichnet.

Beispiel (Fortsetzung)

Π besitzt also folgende Struktur:

$$\Pi = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 0 & * & & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & 0 & & 0 & * \\ * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach nur N Schritten kann man von jedem Alter aus jedes beliebige Alter mit Wahrscheinlichkeit > 0 erreichen, d.h. $\Pi^N(x, y) > 0 \quad \forall x, y \in E$. Des weiteren ist die mittlere Rückkehrzeit in das Alter 0 gerade die mittlere Lebensdauer eines Geräts, also $\mathbb{E}(L_1)$. Damit gilt nach dem Ergodensatz und dem Korollar von vorhin:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{k} L_i = n \text{ für ein } k \geq 1\right) = \lim_{n\to\infty} P^0(X_n = 0) = \frac{1}{\mathbb{E}(L_1)}$$

Dies ist der sogenannte *Erneuerungssatz* in einer vereinfachten Fassung.

Beispiel (Die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$)

Unter der einfachen symmetrischen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ versteht man die Markov-Kette auf $E = \mathbb{Z}^d$ zur Übergangsmatrix

$$\Pi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{falls } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Falle $d = 1$ entspricht dies der Matrix

$$\Pi = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \\ & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\ & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Für $d = 1$ kann man sich einen betrunkenen Spaziergänger vorstellen, der auf einer unendlich langen Straße immer nur einen zufälligen Schritt vor- bzw. rückwärts macht oder sich für $d = 2$ auf einem unendlich großen Schachbrett von Kreuzung zu Kreuzung bewegt. Für $d = 3$ mag man sich ein Kind in einem kubischen Klettergerüst vorstellen.

Beispiel

Die Frage die sich nun stellt ist, wie hoch ist die Rückkehrwahrscheinlichkeit $F_1(x,x)$ in den Startpunkt? Aufgrund der Struktur von Π gilt sicherlich $F_1(x,x) = F_1(y,y) \quad$ für $x \neq y \in E$, die Rückkehrwahrscheinlichkeit ist also für jedes $x \in E$ gleich, daher besitzen alle $x \in E$ den gleichen Rekurrenztyp.
Für $d = 1$ ist jedes $x \in E$ rekurrent. Da eine Rückkehr nur nach einer gleichen Anzahl Schritte nach rechts wie nach links möglich ist, insbesondere nur nach einer geraden Anzahl von Schritten, gilt:

$$G(x,x) = \sum_{n \geq 0} \Pi^{2n}(x,x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus der Multinomialverteilung mit $2d = 2$ Farben, wobei Farbe "rechts" genauso oft vorkommen muss wie Farbe "links".
Mit Hilfe der Stirling-Formel vereinfachen wir den Ausdruck in der Summe:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} = 2^{-2n} \frac{(2n)!}{n!^2} \approx 2^{-2n} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Zurück in der Summe erhalten wir also:

$$\sum_{n \geq 0} 2^{-2n} \binom{2n}{n} \approx \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \Rightarrow G(x,x) = \infty \Rightarrow x \text{ ist rekurrent}$$

Beispiel

Im Fall $d = 2$ gelangen wir ebenfalls nur nach einer geraden Anzahl Schritten zurück zum Startpunkt. Hinzu kommt hier, dass man jeweils k-Mal ($k \leq n$) nach links und nach rechts und je $(n-k)$-Mal nach oben und nach unten gegangen sein muss. Nach Aufsummieren über alle möglichen k erhalten wir hiermit:

$$\begin{aligned}\Pi^{2n}(x,x) &= 4^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!^2\,(n-k)!^2} = 4^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!\,n!^2}{k!^2(n-k)!^2 n!^2} = \\ &= 4^{-2n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = 4^{-2n}\binom{2n}{n}^2 = \left[2^{-2n}\binom{2n}{n}\right]^2 \approx \frac{1}{\pi n}\end{aligned}$$

Wieder zurück in der Summe erhalten wir also wie im Fall 1

$$G(x,x) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\pi n} = \infty$$

und somit, dass x rekurrent für $d = 2$.

Beispiel

Für den Fall $d = 3$ betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall $d \geq 1$. Dann ist:

$$\Pi^{2n}(x,x) = (2d)^{-2n} \sum_{k_1+\ldots+k_d=n} \frac{(2n)!}{k_1!^2 \ldots k_d!^2} = 2^{-2n}\binom{2n}{n} \sum_{\vec{k}} \left[d^{-n}\binom{n}{\vec{k}}\right]^2$$

Wobei

$$\vec{k} := (k_1, k_2, \ldots, k_d) \qquad k_i \geq 0 \quad \forall i, \sum_{i=1}^{d} k_i = n \tag{5}$$

Sei nun $K := \left\{\vec{k}\right\}$ die Menge aller $\vec{k}$ mit Eigenschaft (5), $k^* \in K$ so, dass $d^{-n}\binom{n}{k^*}$ maximal wird und sei $K^* := K \setminus \{k^*\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{k}} \left[d^{-n}\binom{n}{\vec{k}}\right]^2 &= \sum_{\vec{k}\in K^*} \left[d^{-n}\binom{n}{\vec{k}}\right]^2 + \left[d^{-n}\binom{n}{k^*}\right]^2 = \\
&= \left[d^{-n}\binom{n}{k^*}\right]^2 \left[\sum_{\vec{k}\in K^*} \frac{\left[d^{-n}\binom{n}{\vec{k}}\right]^2}{\left[d^{-n}\binom{n}{k^*}\right]^2} + 1\right] \leq \\
&\leq \ldots
\end{aligned}$$

Beispiel

$$\ldots \leq \left[d^{-n}\binom{n}{k^*}\right]^2 \left[\left(\sum_{\vec{k}\in K^*} \frac{d^{-n}\binom{n}{\vec{k}}}{d^{-n}\binom{n}{k^*}}\right)^2 + 1\right] \leq \left[d^{-n}\binom{n}{k^*}\right]^2 \left[\left(\sum_{\vec{k}\in K^*} \frac{d^{-n}\binom{n}{\vec{k}}}{d^{-n}\binom{n}{k^*}}\right) + 1\right] =$$

$$= d^{-n}\binom{n}{k^*}\left[\sum_{\vec{k}\in K^*} d^{-n}\binom{n}{\vec{k}} + d^{-n}\binom{n}{k^*}\right] = d^{-n}\binom{n}{k^*} \underbrace{\sum_{\vec{k}} d^{-n}\binom{n}{\vec{k}}}_{=1} = d^{-n}\binom{n}{k^*}$$

Wir erhalten also:

$$\Pi^{2n}(x,x) \leq 2^{-2n}\binom{2n}{n} \max_{\vec{k}} \left[d^{-n}\binom{n}{\vec{k}}\right] \tag{6}$$

Wie sieht dieses k^* nun aus? Damit $d^{-n}\binom{n}{k^*}$ maximal wird, müssen die k_i annähernd gleich groß sein, nämlich $\approx \frac{n}{d}$: $\left|k_i - \frac{n}{d}\right| \leq 1 \quad \forall i$. Andernfalls gäbe es i, j mit: $k_i \geq k_j + 2$ und die Ersetzungen $k_i \to k_i - 1$, $k_j \to k_j + 1$ würden den Multinomialkoeffizienten vergrößern:

$$\frac{1}{k_i!k_j!} < \frac{1}{k_i!k_j!}\frac{k_i}{k_j+1} \quad \text{da } k_i > k_j + 1$$

Beispiel

$$\frac{1}{k_i!k_j!}\frac{k_i}{k_j+1} = \frac{1}{(k_i-1)!(k_j+1)!}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{k_i!k_j!} < \frac{1}{(k_i-1)!(k_j+1)!}$$

Man kann also annehmen:

$$k_i \approx \frac{n}{d} \qquad \forall i \in \{1,\dots,d\}$$

Daraus ergibt sich nun:

$$d^{-n}\binom{n}{k^*} \approx d^{-n}\frac{n!}{\left(\frac{n}{d}\right)!^d}$$

Den letzten Ausdruck approximieren wir wieder durch die Stirling-Formel:

$$d^{-n}\frac{n!}{\left(\frac{n}{d}\right)!^d} \approx d^{-n}\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}}{\left(\sqrt{2\pi\frac{n}{d}}\left(\frac{n}{d}\right)^{\frac{n}{d}} e^{-\frac{n}{d}}\right)^d} = d^{-n}\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi\frac{n}{d}}^d\left(\frac{n}{d}\right)^n e^{-n}} =$$
$$= d^{-n}\frac{1}{(2\pi n)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{d}{2}} d^{-n}} = d^{\frac{d}{2}}(2\pi n)^{-\frac{d-1}{2}}$$

Beispiel

Wieder in (6) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}\Pi^{2n}(x,x) \quad &\leq \quad 2^{-2n}\binom{2n}{n} d^{\frac{d}{2}} (2\pi n)^{-\frac{d-1}{2}} \overset{Stirling}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} d^{\frac{d}{2}} (2\pi n)^{-\frac{d-1}{2}} = \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} d^{\frac{d}{2}} (2\pi n)^{-\frac{d}{2}} =: c_d n^{-\frac{d}{2}}\end{aligned}$$

Zurück in die Summe erhalten wir:

$$G(x,x) = \sum_{k\geq 1} \Pi^{2n}(x,x) \leq \sum_{k\geq 1} c_d n^{-\frac{d}{2}}$$

Für $d \geq 3$ ergibt sich somit: $G(x,x) \leq \sum_{k\geq 1} c_d n^{-\frac{d}{2}} < \infty$.

Also ist x transient für $d > 2$ und die Wahrscheinlichkeit, nie wieder in den Ausgangspunkt zurückzukehren ist echt größer als 0. Ein Kind in einem unendlich großen Klettergerüst sollte also nie unbeaufsichtigt gelassen werden.